

Control 2, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/2 (11 de Octubre)

P1) a) (3 ptos) Mediante cambios de variables apropiados calcule:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx \quad (\text{Ind: complete el cuadrado perfecto}) \quad \int_{2^5}^{4^5} \frac{dx}{x+x^{3/5}}$$

Solución

Completando el cuadrado perfecto la primera primitiva se escribe:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$$

..... 0.5 pto.
 de modo que usamos el cambio $x+1 = 2\sin t$, con $dx = 2\cos t dt$.

$$\int \frac{4\sin t - 3}{2\cos t} 2\cos t dt = \int (4\sin t - 3) dt = -4\cos t - 3t + C.$$

..... 1.0 pto.
 Para la segunda integral hacemos el cambio $x = u^5$ con $dx = 5u^4 du$ 0.5 pto.

Queda

$$\int_2^4 \frac{5u^4 du}{u^5 + u^3} = \int_2^4 \frac{5u du}{u^2 + 1} = \frac{5}{2} \ln(u^2 + 1) \Big|_2^4 = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{17}{5}\right)$$

..... 1.0 pto.

b) (1.5 ptos) Considere la Integral $I_n = \int \frac{du}{(1+u^2)^n}$. Demuestre que satisface la fórmula de recurrencia

$$I_{n+1} = \frac{u}{2n(1+u^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Solución

Consideremos la integración por partes definida por $f = \frac{1}{(1+u^2)^n} \rightarrow f' = \frac{-2nu}{(1+u^2)^{n+1}}$
 $g' = 1 \rightarrow g = u$

..... 0.5 pto.
 con eso se tiene que

$$I_n = \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2n \int \frac{u^2 + 1 - 1}{(1+u^2)^{n+1}}$$

..... 1.0 pto.
 de donde se obtiene el resultado

c) (1.5 ptos) Usando el cambio de variables $u^2 = \frac{x-1}{x+1}$ y la parte (b), calcule

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

Solución

Usando este cambio de variables queda $2udu = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{(x+1)^2} dx$. Además despejando x queda $u^2x + u^2 = x - 1$, de donde $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ y $x+1 = \frac{2}{1-u^2}$
La integral queda

0.5 pto.

$$\int u \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right)^2 u \left(\frac{2}{1-u^2} \right)^2 du = \int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} du$$

0.5 pto.

.....
Separando en fracciones parciales (o sumando y restando 1 al numerador) esta primitiva queda

$$4 \int \frac{1}{1+u^2} - 4 \int \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Usando la parte anterior para la segunda primitiva ($n=1$) obtenemos

$$4 \int \frac{1}{1+u^2} - 4 \left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} \right) = 2 \arctg(u) - \frac{4u}{1+u^2} + C.$$

0.5 pto.

P2) a) (2 ptos) Identifique la sumatoria $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ como una suma de Riemann y calcule su límite cuando $n \rightarrow \infty$.

Solución

Claramente $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1 + (k/n)^2} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ para $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y $x_k = \frac{k}{n}$ que forman una partición del intervalo $[0, 1]$

0.5 pto.

Por lo tanto la sumatoria converge a la integral $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$

1.0 pto.

que vale $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

0.5 pto.

b) Considere una función $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

i) (0.5 ptos) Explique por qué f^{-1} es también integrable y estrictamente creciente.

Solución

Al ser f continua, su inversa lo es y en consecuencia es Riemann integrable. Además las inversas de crecientes son crecientes.

0.5 pto.

- ii) (2 ptos) Considere la partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c, d]$. Demuestre que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac$$

Solución

Al tratarse de funciones crecientes se tiene que

$$M_i(f) = f(x_i) \quad \text{y} \quad m_i(f^{-1}) = f^{-1}(y_{i-1}) = x_{i-1}.$$

Por lo tanto

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_{i-1}(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Reordenando queda

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)x_i - f(x_{i-1})x_{i-1} = f(x_n)x_n - f(x_0)x_0 = db - ca.$$

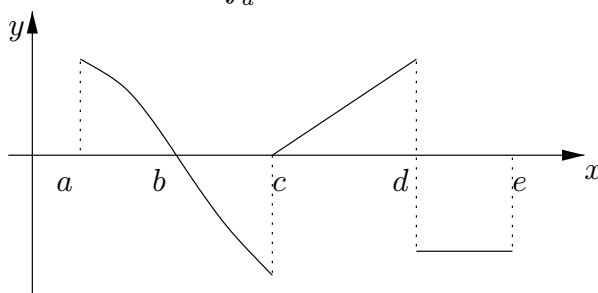
- iii) (1.5 ptos) Use apropiadamente las continuidades de f y f^{-1} para demostrar (a partir de (ii)) que $\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$

Solución

Por tratarse de funciones continuas, cuando las normas de las particiones P y Q tienden a cero, las sumas de Riemann tienden a las integrales correspondientes. .. Luego, tomando límite en la expresión (ii) se tiene que

$$\int_a^b f + \int_c^d f^{-1} = bd - ac.$$

- P3)** a) La figura muestra el gráfico de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, e]$. Con ella se define la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.



Indique, argumentando apropiadamente, cuales son los crecimientos, concavidades y continuidad de la función F .

Solución

Por TFC, la función F es siempre continua en todo el intervalo $[a, e]$

Además, donde f es continua F es derivable y $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto los signos de F' son los signos de f y así F es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$, y es decreciente en $[b, c]$ y $[d, e]$

Las convexidades de F están asociadas al crecimiento de su derivada f . Por lo tanto F es convexa en $[c, d]$ y $[d, e]$ y es cóncava en $[a, c]$ y $[d, e]$

0.8 pto.

0.7 pto.

0.5 pto.

- b) Integrando por partes y acotando apropiadamente pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_1^{2\pi} \frac{\sin(nx)dx}{x} \right| = 0$.

Solución

Integramos por partes del modo $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
 $g'(x) = \sin(nx) \rightarrow g(x) = \frac{1}{n} \cos(nx)$

Así la integral queda

$$\frac{1}{nx} \cos nx \Big|_1^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_1^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2} = \frac{1}{2\pi n} - \frac{\cos n}{n} + \frac{1}{n} \int_1^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2}$$

1.0 pto.

Acotando se tiene que

$$\left| \int_1^{2\pi} \frac{\sin(nx)dx}{x} \right| \leq \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \int_1^{2\pi} \frac{1}{x^2}$$

Claramente la cota tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$

1.0 pto.

- c) Considere las funciones $G(y) = \int_{\sqrt{y}}^1 yf(t)dt$ y $H(x) = \int_0^{x^2} tf(x)dt$, donde f es continua en \mathbb{R} .

Calcule $G'(y)$ y $H'(x)$, y pruebe que si $f(x) = x$ entonces $\int_0^1 G(y)dy = \int_0^1 H(x)dx$.

Solución

Antes de derivar, notamos que $G(y) = -y \int_1^{\sqrt{y}} f$ y $H(x) = \frac{1}{2}x^4 f(x)$.

Por lo tanto $G'(y) = - \int_1^{\sqrt{y}} f - yf(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$ y $H'(x) = 2x^3 f(x) + \frac{1}{2}x^4 f'(x)$

1.0 pto.

En el caso $f(x) = x$ queda $G(y) = -\frac{1}{2}y(y-1)$ y $H(x) = \frac{1}{2}x^5$, de donde $\int_0^1 G(y)dy =$

$\frac{1}{3}$ y $\int_0^1 H(x)dx = \frac{1}{12}$

1.0 pto.